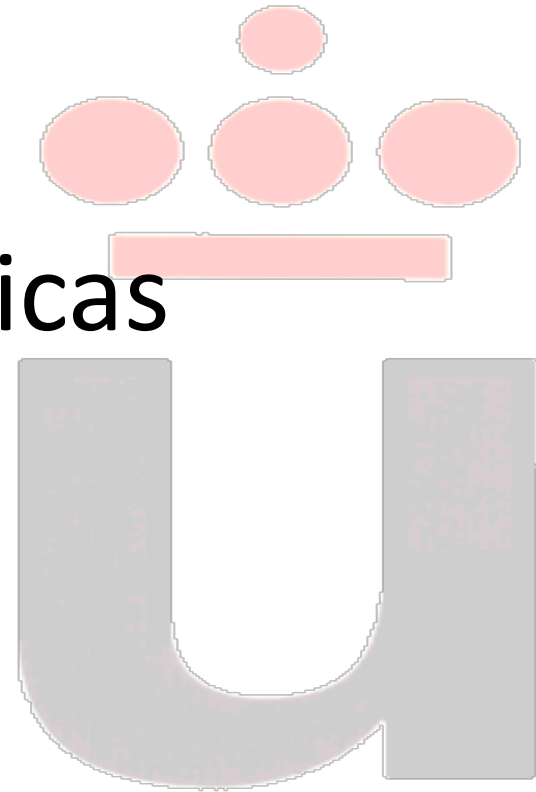


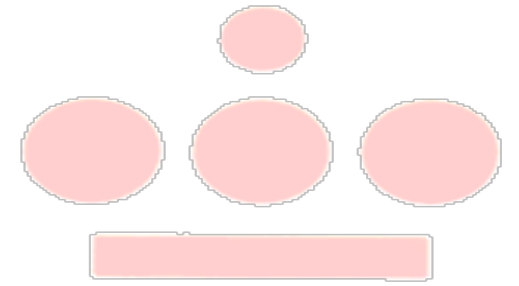
# Tema 6. Formas cuadráticas



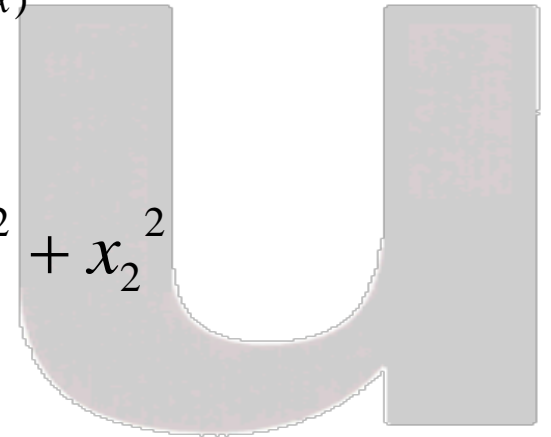
# 1. Definición de forma cuadrática

- Una forma cuadrática en  $\mathbb{R}$  es

$$x = (x_1, \dots, x_n) \longrightarrow Q(x) = \underbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j}_{\text{Forma polinómica de } Q(x)}$$



- Ejemplo:  $Q: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad x = (x_1, x_2) \longrightarrow Q(x) = x_1^2 + x_2^2$



## 2. Matriz asociada a una forma cuadrática

- Dada  $Q$  una forma cuadrática, se tiene

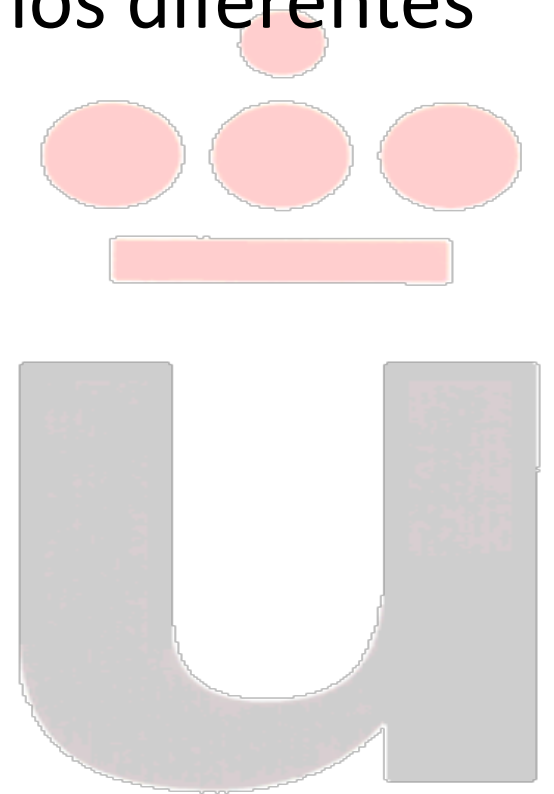
$$x \longrightarrow Q(x) = \underbrace{X^t \cdot A \cdot X}_{\text{Forma matricial de } Q} = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

donde  $A$  es una matriz simétrica  $A=A^t \in M_n$  de modo que los términos de la diagonal principal son los coeficientes de los términos cuadráticos del polinomio y los restantes, la mitad de los términos cruzados en la expresión polinómica



# Signo de una forma cuadrática

- Se trata de analizar si  $Q$  mantiene el signo para los diferentes valores de  $\bar{x}$ .
- Clasificación
  - DEFINIDA POSITIVA
  - SEMIDEFINIDA POSITIVA
  - DEFINIDA NEGATIVA
  - SEMIDEFINIDA NEGATIVA
  - INDEFINIDA



# Estudio del signo de una forma cuadrática por menores principales

Sea  $A$  la matriz asociada a una forma cuadrática y sean los menores principales de  $A$ :

$$|A_1| = |a_{11}| = a_{11} \quad |A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \dots \quad |A_n| = |A| =$$

The diagram shows a matrix  $A$  with elements  $a_{ij}$ . The first row is  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ . The second row is  $a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}$ . The  $n$ -th row is  $a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}$ . The first element  $a_{11}$  is circled in red. The  $2 \times 2$  submatrix formed by the first two rows and columns is shaded in light red. The  $n \times n$  submatrix formed by the first  $n$  rows and columns is shaded in light gray.

Entonces:

- 1)  $Q(x)$  es D.P.  $\Leftrightarrow |A_i| > 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$
- 2)  $Q(x)$  es D.N.  $\Leftrightarrow |A_i| < 0, \quad |A_2| > 0, \quad |A_3| < 0, \dots$

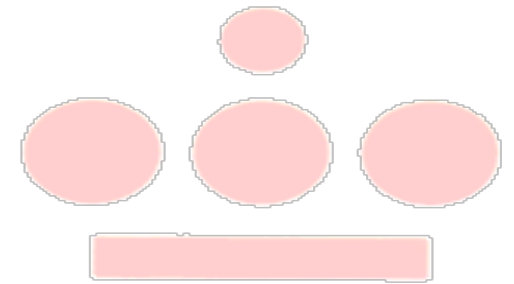
# Estudio del signo de una forma cuadrática por menores principales

3)  $|A_i| > 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n-1 \quad \text{y} \quad |A_n| = 0 \Rightarrow Q(x) \text{ es } \underline{S.D.P.}$

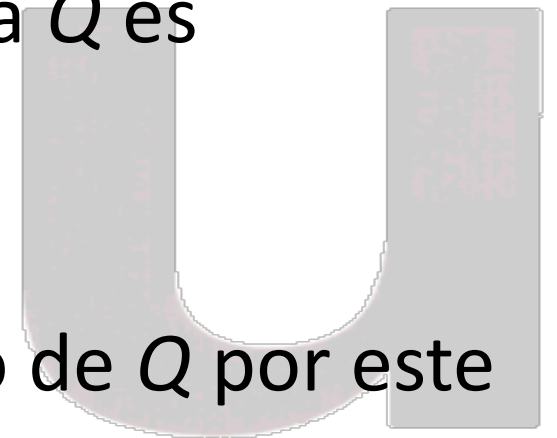
4)  $|A_1| < 0, \quad |A_2| > 0, \quad |A_3| < 0, \dots, \quad |A_n| = 0 \Rightarrow Q(x) \text{ es } S.D.N.$

# Estudio del signo de una forma cuadrática por menores principales

5) Si  $|A_n| \neq 0$  y  $Q$  no es definida  $Q$  es INDEFINIDA.



6) Si  $|A_n|=0$  y  $|A_i| \neq 0, \forall i=1,2,\dots,n-1$  y  $Q$  no es semidefinida  $Q$  es INDEFINIDA.

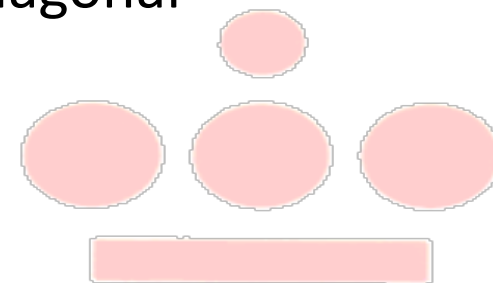


En cualquier otro caso, no se puede saber el signo de  $Q$  por este método.

# Estudio del signo mediante los autovalores

- Propiedad 2: Dada la forma cuadrática definida por una matriz diagonal

$$Q(\bar{x}) = (x_1, \dots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$



- $Q(\bar{x})$  es D.P. sí, y sólo sí, todos los elementos de su diagonal principal son mayores que 0.
- $Q(\bar{x})$  es D.N. sí, y sólo sí, todos los elementos de su diagonal principal son menores que 0.
- $Q(\bar{x})$  es S.D.P. sí, y sólo sí, todos los elementos de su diagonal principal son mayores o iguales que 0.
- $Q(\bar{x})$  es S.D.N. sí, y sólo sí, todos los elementos de su diagonal principal son menores o iguales que 0.
- $Q(\bar{x})$  es INDEFINIDA en cualquier otro caso (hay elementos de su diagonal principal positivos y negativos).



# Estudio del signo: Método de los autovalores

- Al ser la matriz asociada a una forma cuadrática simétrica, es diagonalizable, por lo que:
  - es definida positiva (D.P.) Todos los autovalores de la matriz son positivos y no nulos.
  - es definida negativa (D.N.) Todos los autovalores de la matriz son negativos y no nulos.
  - es semidefinida positiva (S.D.P.) Todos los autovalores de la matriz son positivos y alguno de ellos nulo.
  - es semidefinida negativa (S.D.N.) Todos los autovalores de la matriz son negativos y alguno de ellos nulo.
  - es indefinida (Ind.) la matriz posee autovalores positivos y negativos.